

## Os números relativos em sala de aula: um olhar para o zero

Célia Maria Ananias Salvador<sup>1</sup>  
mauricel@ig.com.br  
Adair Mendes Nacarato<sup>2</sup>  
adamn@terra.com.br

### Resumo

*A presente pesquisa tem como objetivos: 1) Identificar os significados que os alunos atribuem ao zero; 2) Analisar em que medida o ensino de números relativos contribuiu para a elaboração conceitual sobre o zero, por parte dos alunos, cuja questão de investigação é: Que significados são atribuídos ao zero pelos alunos de 6ª série ao iniciarem o estudo de números relativos e que contribuições a prática pedagógica traz a esse processo de elaboração conceitual? Foi realizada com 39 alunos de uma escola pública da cidade de Louveira/SP/Brasil. Os aportes teóricos sustentam-se na história da Matemática (Ifrah; Boyer; Baumgart; Barker; Eves), na epistemologia (Caraça), na pedagogia (Brousseau e PCN) e na aquisição conceitual (Bakhtin; Fontana; Vygotsky). São considerados quatro significados para o zero: valor absoluto, origem, valor posicional e zero como dado operatório – os mesmos citados na história. Os dados encontram-se ainda em fase de análise. No entanto, nas respostas dos alunos, nos três momentos da pesquisa, emergiram três categorias de análise que são: 1) O dicionário como objeto de mediação na produção de significados; 2) As marcas da escolarização na utilização do conceito de zero; e 3) A influência da prática pedagógica sobre números inteiros na concepção dos alunos sobre o zero.*

### Introdução

O presente trabalho refere-se à Dissertação de Mestrado desenvolvida junto ao Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação da Universidade São Francisco – Câmpus de Bragança Paulista/SP, linha de pesquisa “Cultura escrita e matemática nos processos de escolarização”.

O interesse pela presente pesquisa surgiu a partir da prática pedagógica, com turmas de 6ª série, quando se percebia a dificuldade dos alunos perante o estudo dos números inteiros relativos, que se evidenciava no momento de aprendizagem das regras de sinais. A não compreensão de tais regras gerava, em nós, um total desconforto o que nos levava a procurar uma forma mais clara de ajudá-los a compreender tais regras. No entanto, percebíamos que nos faltavam elementos teóricos e históricos para tal. Nesse sentido, ingressamos no curso de Pós-

---

<sup>1</sup> Universidade São Francisco (USF). Linha de pesquisa: Cultura escrita e matemática no processo de escolarização

Graduação acreditando na possibilidade de buscar tais fundamentos e investigar quais as reais dificuldades dos alunos.

Logo no início do curso, em contato com referenciais teóricos sobre a temática, já pudemos constatar que o problema era mais complexo, visto que as regras são apenas decorrência de toda uma elaboração conceitual e que, no caso da multiplicação de dois números negativos, o fato de o produto ser positivo trata-se de uma definição, com vistas à manutenção da consistência interna da própria matemática ou o “*princípio da permanência das leis formais*” (Caraça, 2000,p.27). Ao buscar a compreensão desse fato, nos deparamos com outros referenciais teóricos e, dentre eles, os estudos realizados por Glaeser (1985) que analisa os obstáculos epistemológicos presentes na história dos números negativos.

Esses estudos iniciais nos apontaram um possível caminho de investigação. Nosso interesse deixava de ser as regras de sinais e passava a ser a questão dos obstáculos epistemológicos, quais sejam:

1. Inaptidão para manipular quantidades isoladas;
2. Dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas;
3. Dificuldade em unificar a reta numérica manifesta pela diferenciação qualitativa entre quantidades positivas e negativas, pela concepção da reta como mera justaposição de duas semi-retas opostas, ou ainda por desconsideração do caráter simultaneamente dinâmico e estático dos números;
4. Ambigüidade dos dois zeros: zero absoluto e zero como origem;
5. Dificuldade de afastar-se de um sentido “concreto” atribuído aos seres numéricos: fixação no estágio das operações concretas por oposição ao formal;
6. Desejo de um modelo unificador: utilização de um modelo aditivo para o campo multiplicativo, ao qual não se aplica.

As primeiras atividades realizadas com os alunos já revelaram a existência de algo, que até então não fazia parte de nossos propósitos de investigação: a questão do zero. Ela até se inseria na questão do obstáculo 4, mas, para nós, inicialmente, tratava-se de uma questão menor. Analisando as primeiras manifestações dos alunos – em registros escritos ou na vídeo-gravação – a importância de se deter mais na questão do zero se evidenciou.

---

<sup>2</sup> Universidade São Francisco (USF). Linha de pesquisa: Cultura escrita e matemática no processo de escolarização

Constatamos que o conteúdo referente ao zero vinha passando meio que despercebido. É comum – quando se começa a falar sobre os números inteiros – nós professores darmos mais ênfase aos números negativos, ou seja, nos preocupamos mais como os alunos irão conceber esse novo conceito de número – que acreditamos ser um dos mais complexos para eles –, que até então não os conheciam, e se os conheciam, não os compreendiam.

Enfim, a preocupação quanto a esse conceito – números relativos – é tão grande que, quando introduzimos os números inteiros, geralmente, com a reta numérica, esquecemos de discutir com os alunos a importância do zero na reta, ou seja, o zero como ponto de referência, que podemos considerar como o significado essencial para a compreensão dos números relativos. Mas é tão comum considerarmos apenas o significado de valor posicional que não damos conta da importância do zero como origem. E somente nos inteiramos deste fato após o contato com os alunos na condição de pesquisadora e não de professora.

Em virtude disso, optamos em redirecionar nossa investigação, nos apoiando apenas na questão do zero. Evidentemente, tal questão só emergiu em virtude de nossos estudos sobre os obstáculos apontados por Glaeser. Assim, a pesquisa tomou novos rumos, buscando compreender o processo de elaboração conceitual do zero pelos alunos da 6ª série.

Redefinido o eixo central da pesquisa, buscou-se, principalmente na história da Matemática, elementos que possibilitassem uma compreensão do surgimento tanto do zero quanto dos números negativos (Ifrah, 1995; Boyer, 1974; Baumgart, 1992; Barker, 1969; Eves, 1995 dentre outros), na tentativa de compreender como o zero se inseriu nesse processo. Além do aspecto histórico, nos apoiamos também nas questões epistemológicas (Caraça, 1999), pedagógicas (Brousseau, e PCN, 1996) e de aquisição conceitual (Bakhtin, 2000; Fontana, 1997, 2000, 1993; Vygotsky, 1989).

## **A pesquisa**

A pesquisa, de abordagem qualitativa, caracteriza-se como um estudo de caso. Fazem parte deste estudo 39 alunos de 6ª série, com idades entre 12 a 14 anos, de uma escola pública estadual da cidade de Louveira/SP. Trata-se de uma escola de periferia em que os alunos são de origem nordestina e filhos de lavradores.

A presente pesquisa tem como objetivos:

- 1) Identificar os significados que os alunos atribuem ao zero.

2) Analisar em que medida o ensino de números relativos contribuiu para a elaboração conceitual sobre o zero, por parte dos alunos.

Isso posto, nossa questão de investigação é: Que significados são atribuídos ao zero pelos alunos de 6ª série ao iniciarem o estudo de números relativos e que contribuições a prática pedagógica traz a esse processo de elaboração conceitual?

Nossa inserção na escola ocorreu no período de fevereiro/2002 a abril/2002, quando acompanhamos as aulas da professora titular. No início do trabalho em sala de aula, já tendo como objetivo analisar o zero-absoluto e o zero-origem (Glaeser, 1985), trabalhamos com os alunos nas primeiras aulas com o jogo do vai-e-vem<sup>3</sup>, e no final do jogo, propusemos aos alunos a seguinte questão: "Qual o significado do zero para você?", para que respondessem por escrito e entregassem na aula seguinte (chamaremos de 'primeiro momento' essa sondagem inicial). Após duas semanas de aulas (doze no total), em que os alunos lidaram com uma série de atividades e jogos relacionados aos números negativos, bem como discussões sobre a história do zero e seus significados, novamente fizemos a mesma questão para que fosse respondida na própria sala de aula (chamaremos segundo momento). O objetivo nesse momento era identificar que significados o aluno atribuía ao zero, após o contato com a reta numérica – zero como origem. Terminado o estudo sobre os números relativos, voltamos a aplicar aos alunos a mesma questão (chamaremos terceiro momento), também em sala de aula. Nesse terceiro momento o objetivo era verificar se o estudo desse novo campo numérico trouxe contribuições nas concepções dos alunos.

### **A questão do zero**

Historicamente, o zero foi preocupação de quatro grandes civilizações: babilônios, chineses, maias e hindus.

Utilizar o zero nas posições intermediária, terminal e inicial, foi o que diferenciou os babilônios das outras civilizações e os fizeram pioneiros na criação do zero, pois os astrônomos babilônios apesar de não terem concebido o zero como um número mas simplesmente como sinônimo de vazio, atribuíram a ele a função de operador aritmético "*multiplicando a adjunção de um sinal-zero no fim de uma representação algarítmica por sessenta, isto é, pela base, o valor do número correspondente*" (Ifrah, 1997a, p.686).

---

<sup>3</sup> Extraído de Atividades Matemáticas – 6ª série, CENP/SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO/SÃO PAULO.

Os maias elaboraram uma numeração de posição e inventaram o zero. Mas, pelo fato de seu sistema não ser estritamente vigesimal, na questão do registro escrito, acabou por gerar irregularidades, privando-os de qualquer possibilidade operatória. (Ifrah, 1997a, p. 643). Assim, pode-se dizer que os maias utilizaram o zero como algarismo e não como número – valor operatório.

Os matemáticos chineses – como os babilônios – utilizaram-se do espaço vazio para indicar a ausência de unidades faltantes. Mas, somente a partir do século VIII d.C., que os matemáticos chineses introduziram na sua numeração posicional um símbolo em forma de círculo (O) para o zero, preenchendo assim o espaço vazio que marcava a ausência das unidades de uma certa ordem, *“uma idéia que lhes veio sem nenhuma dúvida pela influência dos matemáticos da civilização indiana”* (Ifrah, 1997a, p.585).

Os hindus foram os criadores do sistema de numeração posicional – síntese dos principais sistemas até então criados – e muitos cálculos efetuados por eles eram realizados com a ajuda do ábaco, instrumento que para a época poderia ser considerado uma verdadeira máquina de calcular. Inicialmente usado pelos hindus, o ábaco consistia em meros sulcos feitos na areia, onde se colocavam pedras. Cada sulco representava uma ordem. Assim, da direita para a esquerda, o primeiro sulco representava as unidades; o segundo as dezenas e o terceiro as centenas. O sulco vazio do ábaco, indica que não existe nenhuma dezena. Mas na hora de escrever o número faltava um símbolo que indicasse a inexistência de dezenas. Percebendo que algo estava errado, ou melhor, que algo estava faltando, os hindus criaram o tão desejado símbolo para representar o sulco vazio e o chamaram de *Shunya* (vazio).

Com a criação da base 10, cada dezena recebia um nome assim como cada centena e milhar, mas ao invés de fazer como hoje, de acordo com as potências decrescentes de 10, os hindus escreviam os números em ordem crescente das potências de 10 por volta do século IV depois de Cristo. Eles começavam pelas unidades, depois pelas dezenas, pelas centenas e assim por diante.

Em virtude da grande repetição que ocorria com as potências de 10, por volta do século V depois de Cristo, os matemáticos e astrônomos hindus resolveram abreviar a notação retirando os múltiplos de 10 que apareciam nos números grandes. E esta se transformou em uma notação falada e escrita posicional excelente para a época, mas começaram a acontecer alguns problemas,

ou seja, começou ocorrer ambigüidade nas leituras dos números, como escrever os números 31 e 301.

Portanto, nenhum progresso seria possível se a coluna vazia não fosse preenchida por um símbolo, ou seja, um símbolo para o nada, o nosso zero moderno.

Tendo em vista o problema na construção dos números como 31, 301, 310, 3001 e 3010 os hindus criaram um símbolo para representar algo vazio (ausência de tudo) que foi denominado *shunya*.

Dessa forma, foi resolvido o problema da ausência de um algarismo para representar as dezenas no número 301 e assim passaram a escrever:

$$301 = 1 + ? \times 10 + 3 \times 100$$

$$301 = \text{dasa shunya tri}$$

Os hindus tinham acabado de descobrir o zero.

Porém estas notações só serviam para as palavras e não para os números, mas reunindo essas idéias apareceram juntos o zero bem como o atual sistema de notação posicional.

Como a mais antiga forma do símbolo hindu era comumente usado em inscrições e manuscritos para assinalar um espaço em branco, era chamado *shunya*, significando “lacuna” ou “vazio”. Essa palavra entrou para o árabe como *sifr*, que significa “vazio”. Ela foi transliterada para o latim como *zephirum* por volta do século XIII, mantendo-se seu som mas não seu sentido. Mudanças sucessivas dessas formas, levaram as nossas palavras “cifra” e “zero”. O significado duplo da palavra “cifra” hoje - tanto pode se referir ao símbolo do zero como a qualquer dígito - não ocorria no original hindu.

Segundo Hogben, (1958, p. 301, 302):

*Devemos à Índia o engenhoso método de exprimir todos os números por meio de dez símbolos...invenção notável, mas tão simples, que nem sempre lhe reconhecemos o mérito. Não obstante, a esta mesma simplicidade, à imensa facilidade que trouxe a todos os cálculos, devemos o achar-se a aritmética à vanguarda de todas as grandes invenções. Só podemos apreciar condignamente o mérito desta descoberta, lembrando-nos que escapou ao gênio de Arquimedes, de Apolônio e de todos os matemáticos da antigüidade clássica...”*

*... A invenção de shunya ou 0, libertou o intelecto humano das grades despóticas do ábaco. Uma vez inventado um símbolo representativo da coluna vazia, “trabalhar” na lousa, no papel, no pergaminho ou em qualquer material, passou a ser tão simples, quanto trabalhar no ábaco....*

Este foi, sem dúvida, o passo decisivo para a criação de um sistema de numeração prático e eficiente. A partir daí e da divulgação desse sistema na Europa, a teoria dos números ganha um novo impulso. O zero passa a ser um número e um operador matemático.

No entanto, esta história pouco valor terá para a sala de aula se ela não se associar às questões teóricas e epistemológicas envolvidas com o conceito do zero.

Antes de falarmos do zero como número, vamos inicialmente esclarecer com quais significados alguns termos serão utilizados neste trabalho.

- 1) Noção de número: é a idéia de quantidade que nos vem à mente quando contamos, ordenamos e medimos. Assim, estamos pensando em números quando contamos os lápis coloridos que possuímos, enumeramos a posição de uma pessoa numa fila ou medimos o peso de um objeto.
- 2) Noção de numeral: é toda representação de um número, seja ela escrita ou falada.
- 3) Noção de algarismo: é todo símbolo numérico que usamos para formar os numerais escritos.

A história do zero foi complexa, pois se ter a noção de algarismo zero é bastante diferente de se ter a noção de número zero; só se terá atingido a noção de zero quando se puder calcular com ele.

Conforme Gundlach (1992), apesar dos matemáticos da Antigüidade terem aceitado o zero como uma solução possível, o zero não tinha tanto significado em soluções de problemas práticos.

Enfim, o zero só foi concebido como número a partir de Bhaskara.

Segundo Gundlach (1992, p.14), podemos seguramente afirmar que na matemática elementar moderna o zero é tanto um porta-lugar como um número cardinal, dependendo de que se considere numeração ou sistema de números.

## **O zero como elemento de contagem**

Segundo Caraça a necessidade de contar é que foi dando forma aos números naturais, conseqüentemente à sua criação.

Caraça distingue a idéia de correspondência unívoca, onde cada antecedente tem um conseqüente, da biunívoca ou equivalente, onde a correspondência é unívoca e sua recíproca também. Dessa forma, podemos observar que o zero não se encaixa em nenhuma dessas correspondências, ou seja, não admitindo nenhuma dessas relações, sendo assim, ele não é contável e nem pode ser posto em correspondência. Isso porque começarmos a contar à partir do número “um”.

Assim, para Caraça (1989), o zero não pode ser um número natural, além de ser bastante recente, apareceu lá pelo final do século passado. Não considera o número zero como um número natural, e sim como o primeiro número na sucessão dos números inteiros.

Quando o zero surgiu, ele pretendia ser um nome mais curto para “inteiro positivo”. Neste ponto de vista, o número “um” seria o primeiro número natural. Sendo assim, temos três idéias de natureza numérica:

- A de **seqüência**, que representamos pelos **ordinais**: primeiro, segundo terceiro, etc (não temos a palavra ou um termo para o zero);
- A de **contagem**, que representamos pelos **cardinais**: zero, um, dois, três, etc (aqui podemos perceber que o zero aparece naturalmente, sendo que não haverá problema algum se dissermos que “restaram zero elementos numa coleção de bolas, por exemplo”, embora seja mais usual dissermos “peguei nenhuma bola”);
- A de **medida de grandeza**: um comprimento, área, etc.
- As idéias de **seqüência** e **contagem** estão associadas à noção de número inteiro e a de **medida** à noção de número real.

Daí nos perguntamos, é ou não natural iniciarmos contando do zero?

Do ponto de vista lógico, não devemos entender o natural de “número natural” no sentido literal, mas no sentido de “número inteiro positivo”. Sob o ponto de vista, o aceitável seria tomar



um (número 1) como o primeiro número natural. Sob o ponto de vista da Teoria dos Cardinais, o mais apropriado seria iniciar do zero. Contudo, será difícil um consenso, pois não há ordinal zero.

Barker (1969), também admite que a expressão “números naturais” é um pouco ambígua, mas considera que a idéia intuitiva da seqüência dos naturais é aquela que se inicia com o zero e soma-se um quantas vezes forem necessárias.

Peano (1858-1932), foi o primeiro a organizar, axiomaticamente, as leis fundamentais dos números naturais. Essa organização ficou conhecida como os ‘Axiomas de Peano’:

1. Zero é um número natural.
2. O sucessor imediato de qualquer número natural é também um número natural.
3. Números naturais distintos nunca têm o mesmo sucesso imediato.
4. Zero não é sucessor imediato de qualquer número natural.
5. Se algo vale para o zero e, valendo para um dado número, também vale para o seu sucessor imediato, valerá, ainda, para todos os números naturais.

Conhecendo essa história de tantos séculos – a da criação do zero – e a falta de consenso se ele é natural ou inteiro, não nos surpreendemos com o fato de nossos alunos hoje se depararem com dificuldades similares e situações conflitantes. Foi possível constatar em nossa pesquisa realizada em sala de aula, que os alunos, em suas falas, ora se referem ao zero como número natural, ora como número inteiro:

*O número zero significa um número neutro e também significa um número sem valor e nulo. O zero é também um número natural. O zero é importante porque ele faz parte dos números 10, 20, 30, etc. (Die).*

### **O zero para representar ordens vazias – zero como valor posicional**

Segundo Dantzig (1970, p. 38): “a conquista do hindu desconhecido que em algum momento nos primeiros séculos de nossa era descobriu o princípio posicional assume as proporções de um acontecimento magnífico”.

O princípio posicional fundamenta-se em dar ao algarismo a seqüência numeral que ele representa, bem como a da posição que ele ocupar com respeito aos outros símbolos do grupo. Só seria possível o progresso da numeração posicional, com o preenchimento da coluna vazia, um símbolo para o nada, ou seja, o nosso zero de hoje.

O zero como algarismo, representando as ordens vazias no sistema de numeração decimal, foi o mais identificado pelos alunos, na pesquisa em sala de aula:

*O zero é um número neutro e ele serve para não deixar um número sozinho, como o número 10, se não tivesse o número zero seria só o número 1. (Raf).*

- **zero como dado operatório**

O zero tido como dado operador, provoca certo desconforto, nas operações que podem ser de duas naturezas – “ou, em face da definição, a colocação do zero num dos dados conduz a uma impossibilidade; ou então está-se em face duma operação possível, mas que a definição dada não abrange” (Caraça, 1989, p.26).

No primeiro caso Caraça (1989), refere-se a divisão  $a : b$ , sendo  $b \neq 0$ , pois caso tenhamos  $b = 0$ , há impossibilidade, pois sabemos que para que a operação seja possível, deve o dividendo ser múltiplo do divisor.

No segundo caso, o produto de  $0 \cdot a$ , define-se como uma soma de produtos, onde  $0 \cdot a = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$ , multiplicação essa em que o zero seja multiplicador, o que resulta em nenhum valor. O mesmo caso ocorre com a potenciação, ou seja,  $a^0$ , não há produtos com valor algum.

Sendo assim, segundo Caraça, não se trata de casos de impossibilidade, mas as definições existentes não possibilitam mais tais operações, gerando a necessidade de se criar novas definições, o que ele chama de *princípio de extensão*.

Dessa forma, podemos perceber que conceber o zero como dado operatório, também não é tarefa tão simples assim.

É interessante percebermos que, na pesquisa em sala de aula, alguns alunos tiveram a concepção do zero como dado operatório:

*O número zero é um número neutro, quer dizer, se tiver ex:  $2 + 0 = 2$ , vai dar dois porque o zero é neutro então o zero não vale, qualquer conta que você tiver o número zero, vai dar o mesmo número que você está somando com o número zero. (Aln).*

*O zero é um número neutro e ele é par, porque depois dele vem o 1 que é ímpar. Ele serve para ficar depois de um número e para calcular algum número, por exemplo:  $1 - 1 = 0$ . (Wing).*

## **O zero como medida: significado de origem**

Caraça utiliza-se da reta numérica para identificar o zero como um número, ou seja, ele o identifica como um ponto *O* o que ele chama de origem e dois sentidos opostos – “*de O para a direita, ou sentido positivo, e de O para a esquerda, ou sentido negativo* – há uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos seus pontos e o conjunto dos números relativos – a todo o ponto à direita de *O* corresponde um número real positivo, e reciprocamente; a todo o ponto à esquerda de *O*, um número real negativo, e reciprocamente; ao próprio *O* corresponde o número zero (1989, p.99).

Para Caraça (1989), medir é comparar duas grandezas, e para medir necessitamos de três fases e três aspectos distintos: escolha da unidade; comparação com a unidade; expressão do resultado dessa comparação por um número. Se o resultado de uma medição é expresso por um número, como o zero poderia então representar uma medida?

Nesse sentido, a compreensão dos números relativos e sua representação na reta orientada pode ser a chave para tal questão. Sendo, na concepção de medida, o número o resultado da medição, quando somamos os opostos temos como medida o zero. Sendo assim, o zero passa a ter um novo conceito, ou seja, o conceito de medida. No entanto, tal conceito está impregnado da qualidade de ser a origem – o segundo aspecto que Glaeser (1985) considera para o número zero.

Na pesquisa realizada em sala de aula, várias foram as manifestações dos alunos com a questão do zero como origem:

*O número zero em uma reta é um ponto de referência, pois parece que não tem valor algum, mas tem, como na temperatura. O zero não é nem positivo nem negativo. (Bru).*

*O número zero é um número neutro, não fica nem do lado positivo nem do lado negativo. É um número que significa um ponto de partida como: 0, 1, 2, 3, etc., é também um ponto de referência. (Dou).*

### **O zero como elemento discreto e contínuo**

Como não poderia ser diferente, começaremos a falar do discreto e do contínuo através das civilizações que mais enfatizaram tal assunto, ou seja, os egípcios, os babilônios e os pitagóricos.

Os egípcios utilizavam números para lidar com geometria, aproximando numericamente entre o valor da área de um círculo pela área de um quadrado, ou seja, utilizavam números para contagem e para medir sem fazer distinção clara entre ambas as atividades. Eles desenvolveram

as frações para lidar com as medidas, trabalhando com números inteiros e com frações unitárias, assim, nunca iriam reparar na existência dos irracionais, pois limitavam-se ao “reino” do discreto dos números naturais.

Os babilônios lidavam diretamente com a continuidade, através das aproximações de medidas, sem questionar sobre a “racionalidade” do valor encontrado.

Os pitagóricos por sua vez, não consideravam o zero(0) e o um(1) como números, nem outras combinações não-naturais, como por exemplo números fracionários. O lema da escola Pitagórica era: Tudo é Número.

Graças aos Gregos, que tiveram um olhar unificador tentando lidar tanto com os números (discreto) pitagóricos quanto com a teoria das proporções entre grandezas (contínuas), puderam perceber a existência de grandezas incomensuráveis. Apesar de optarem na separação do discreto e do contínuo em áreas distintas – A Teoria dos Números e a Geometria -, tiveram o mérito de não ignorar nenhum deles, dando atenção tanto ao estudo dos números quanto da geometria.

A crise dos incomensuráveis marca assim o início claro de uma visão que se divide entre a contagem e a medida, entre o discreto e contínuo. E mostra claramente que a idéia de número é composta tanto de referências à contagem quanto de referências à medidas.

Sendo assim, podemos concluir que, o conjunto dos números inteiros – ou naturais – é do tipo discreto, ou seja, numerável/contável, e o conjunto dos pontos de uma reta é contínuo, ou seja, possibilita medida. Dessa forma, o zero quando pertencente aos números inteiros, tem como significado, zero absoluto, enquanto que, o zero como elemento da reta orientada tem como significado o zero origem.

Assim, podemos concluir que o número zero – o qual faz parte de um conjunto de números – é impregnado de qualidade e de quantidade.

### **As manifestações dos alunos da 6ª série em relação ao zero**

Quanto às manifestações dos alunos referente ao zero, estão sendo analisados os três momentos da prática pedagógica, nos quais emergiram os quatro significados que se fazem presentes na história:

- Zero absoluto (zero como elemento de contagem)
- Zero origem (o zero como medida)
- Zero como valor posicional (algarismo para representar a ordem vazia)

- Zero como dado operatório.

Os dados encontram-se ainda em fase de análise. No entanto, nas respostas dos alunos, nos três momentos da pesquisa, emergiram três categorias de análise que são:

- O dicionário como objeto de mediação na produção de significados.
- As marcas da escolarização na utilização do conceito de zero.
- A influência da prática pedagógica sobre números inteiros na concepção dos alunos sobre o zero.

A primeira categoria foi destacada em virtude da atitude dos alunos em, diante da questão sobre o significado do zero, utilizarem-se do dicionário para respondê-la. Mas constatou-se que, para alguns deles, o significado dicionarizado do zero – significado estável da palavra – se manteve nos outros dois momentos.

As falas dos alunos revelaram situações que vivenciaram no processo de escolarização e que estamos denominando ‘marcas da escolarização’. A primeira delas refere-se às qualidades atribuídas ao zero: ‘zero não tem valor’ e ‘utilidade do zero’, o que nos leva a supor que o zero só tenha sido trabalhado no seu significado de algarismo, visto que em muitas falas, os alunos ressaltam que o zero só utilidade quando junto de outro algarismo. A segunda refere-se à incorporação de atitudes e valores por meio do discurso pedagógico relativo à matemática. O professor, muitas vezes, em sala de aula, na tentativa de contribuir para o aprendizado do aluno, utiliza termos ou expressões, chamando a atenção para fatos que não podem ser esquecidos. A fala de Lei ilustra tal fato: “*Não deve esquecer em qualquer cálculo que vamos efetuar*” (1º momento). Outro tipo de atitude refere-se aos aspectos avaliativos que ocorrem em sala de aula: “*O zero faz parte da classificação negativa. Ele serve para dar uma nota...*” (Al, 3º momento). A terceira ‘marca’ refere-se ao uso inadequado da linguagem, visto que os alunos usam determinados termos matemáticos com significados diversos daqueles conceituais.

Quanto a terceira categoria, não dispomos até o momento de dados analisados.

### **Uma palavra final**

Embora a análise dos dados não esteja concluída, a presente pesquisa apresenta elementos fundamentais para a prática pedagógica em Matemática. Não há como trabalhar os números

relativos com os alunos sem uma discussão sobre os significados do zero. Tais significados deveriam ser tratados ao longo da escolarização e não apenas no momento da introdução dos números relativos. No entanto, sem a posse de tais conceitos, o aluno dificilmente compreenderá esse novo campo numérico e, conseqüentemente, a reta numérica.

### **Referências bibliográficas**

- BAKHTIN, M. **Estética da criação verbal**. São Paulo: Martins Fontes, 2000.
- BACHELARD, G. **A Formação do espírito Científico**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1999.
- BARKER, S. F. **Filosofia da Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 1969.
- BAUMGART, J. K. **Álgebra**. Coleção Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. São Paulo: Atual, 1992.
- BITTENCOURT, J. Obstáculos Epistemológicos e a Pesquisa em Didática da Matemática. **In: Educação Matemática em Revista** - Número 6 ano 5 Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1998, p. 13 – 17.
- BOGDAN, R. & BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Portugal: Porto, 1994.
- BOYER, C.B. **História da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Edgard Blucker, 1974.
- BROLEZZI, A.C., “A Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da matemática no Ensino de Matemática”. São Paulo: Faculdade de Educação/USP. 1996 (Tese de Doutorado).
- BROUSSEAU, G. Os Diferentes papéis do professor. In PARRA, C., SAIZ, I. (orgs). **Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996, p. 48-72.
- CARAÇA, B.J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 2000.
- DANTZIG, T. **Número: A linguagem da Ciência**. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.
- EVES, H. “Introdução a história da matemática”. Campinas/SP: Ed. Unicamp, 1995.
- FONTANA, R.A.C. A elaboração conceitual: a dinâmica das interlocuções na sala de aula. In SMOLKA, A.L.B., GOES, M.C.R. **A linguagem e o outro no espaço escolar: Vygotsky e a construção do conhecimento**. Campinas,SP: Papyrus, 1993, p. 121-151.
- \_\_\_\_\_. **Mediação pedagógica na sala de aula**. Campinas, SP: Autores Associados, 2000.

- GLAESER, G. Epistemologia do Números Relativos. **In: Boletim Gepem**, Ano/1985 nº 17 – Universidade Louis Pasteur, Estrasburgo, p. 29–125.
- GUNDLACH, B.H. **Números e Numerais**. Coleção Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. São Paulo: Atual, 1992.
- GOES, M.C.R. As relações intersubjetivas na construção de conhecimentos. In GOES, M.C.R., SMOLKA, A.L.B. (orgs). **A Significação nos Espaços Educacionais**. São Paulo: Papirus, 1997, p.11-28.
- HOGBEN, L. **Maravilhas da matemática**. Rio de Janeiro: Globo, 1958, 2ª Edição.
- IFRAH, G. **História Universal dos Algarismos**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997 – 2v.
- KAPLAN, R. **O Nada que existe: Uma história natural do zero**. Rio de Janeiro: Ciência Atual Rocco, 2001.
- MACHADO, S. D. A. **Educação matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999.
- MEDEIROS, A., MEDEIROS, C. Números Negativos: Uma História de Incertezas. **In: Bolema – Boletim de Educação Matemática**, Ano 7 nº 08 – Departamento de Matemática – Rio Claro/UNESP, 1992, p. 49 – 59.
- MOURA, M.A. **Construção do signo numérico em situações de ensino**. São Paulo: Faculdade de Educação/USP. 1992 (Tese de Doutorado).
- PAIS, L. C. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- Secretaria de Estado da Educação – São Paulo, Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Experiências Matemáticas**. 6ª série. São Paulo, 1996.